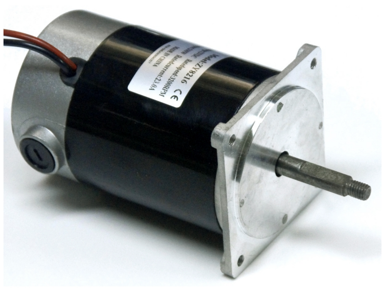
Séquence 01 - TP01 - Îlot 01

Lycée Dorian
Renaud Costadoat
Françoise Puig

Découverte des sytèmes



Référence	S01 - TP01 - I01
Compétences	D2-06: Justifier le choix d'un capteur ou d'un appareil de mesure vis-à-vis de la grandeur physique à mesur D3-04: Identifier les erreurs de mesure. D3-05: Identifier les erreurs de méthode.
Description	TP qui consiste à découvrir les systèmes en effectuant des petites acquisitions.
Système	Moteur à courant continu

Objectif du TP:

Modéliser les caractéristiques d'un moteur à courant continu.

[M] Maths pures : exercice de maths décontextualisé, pour s'entraîner sur le geste mathématique seul avant de l'appliquer au problème (utile si vous n'avez jamais fait de SI).
[+] Aide / rappel : rappel de cours ou méthode facultative, à utiliser si besoin (les élèves à l'aise peuvent l'ignorer).
[++] Bonus : question d'approfondissement facultative, à traiter une fois le reste du sujet terminé.

1 Modèle du moteur électrique à courant continu

$$u_m(t) = L_m.\frac{di(t)}{dt} + R_m.i(t) + e(t) \tag{1}$$
$$e(t) = K_e.\omega_m(t) \tag{2}$$
$$J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) \tag{3}$$
$$C_m(t) = K_m.i(t) \tag{4}$$

Données :
— $u_m(t)$: tension aux bornes du moteur (V),
— $i(t)$: intensité du courant dans le moteur (A),
— $e(t)$: force électromotrice (V),
— $\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur ($rad.s^{-1}$),
— $C_m(t)$: couple moteur (N.m),
— $C_r(t)$: couple résistant (N.m),
— L_m : inductance de la bobine du moteur (H),
— R_m : résistance électrique interne au moteur (Ω),
— K_e : constante électrique du moteur ($V.rad^{-1}.s$),
— J : inertie du moteur ($kg.m^2$),
— K_m : constante de couple du moteur ($N.m.A^{-1}$).

En général, on suppose $K_e = K_m$ pour une MCC.

Question 1 : D'après les équations (1) à (4), **écrire** une équation liant uniquement $u_m(t)$, $\omega_m(t)$ et $C_m(t)$.

[M] Maths pures
Soit les équations $y = 3.x + 2$ et $z = 5.y - 1$. Exprimez z uniquement en fonction de x (sans y). Méthode : remplacez y par son expression dans la deuxième équation.

[+] Aide / rappel
partez de l'équation (4) pour exprimer i(t) en fonction de $C_m(t)$. Injectez cette expression dans l'équation (2) pour obtenir e(t) en fonction de $C_m(t)$, puis injectez les deux résultats dans l'équation (1). Vous devez obtenir une équation où seuls apparaissent $u_m(t)$, $C_m(t)$ (et ses dérivées) et $\omega_m(t)$.

Question 2 : Quelles sont les **hypothèses** à poser afin de mettre cette équation sous la forme $u_m(t) = K.\omega_m(t)$. Est-ce que cela vous paraît raisonnable de prendre ces hypothèses ?

[M] Maths pures
Soit $f(t) = 7$ (une fonction constante au cours du temps). Que vaut $\frac{df(t)}{dt}$? Plus généralement, que vaut la dérivée par rapport au temps d'une grandeur qui ne varie pas au cours du temps ?

[+] Aide / rappel
un système est en **régime établi** (ou permanent) lorsque toutes ses grandeurs sont constantes au cours du temps. Que valent alors les dérivées première et seconde de $\omega_m(t)$ par rapport au temps ?

[++] Bonus / approfondissement
en passant en transformée de Laplace (conditions initiales nulles, sans les hypothèses de régime établi), **écrire** la fonction de transfert $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$ du moteur. Quel est l'ordre de ce système ? Que devient cette fonction de transfert lorsque $p \to 0$? Retrouvez-vous le résultat de la question 2 ?

Question 3 : En supposant que l'on arrive à mesurer le courant qui traverse le moteur, que devient-il alors possible d'**estimer** ?

2 Mesure des valeurs caractéristiques du moteur

Question 4 : **Déterminer** un protocole afin de mesurer la tension aux bornes du moteur. Donner la liste du matériel utilisé et ses caractéristiques (sensibilité, plage de mesure...).

Question 5 : **Déterminer** un protocole afin de mesurer la vitesse de rotation du moteur à l'aide du tachymètre. Donner les caractéristiques du matériel (sensibilité, plage de mesure...).

Question 6 : **Mettre en œuvre** ce protocole pour des tensions allant de 0V à 12V. Écrire les valeurs mesurés dans le script python à télécharger ici et l'utiliser afin de tracer la courbe $\omega_m(t) = f(u_m(t))$. Conclure quant à l'allure de ce tracé, quel modèle peut-on appliquer à ce phénomène ?

[M] Maths pures
Une droite passe par les points $(2, 4)$ et $(5, 13)$. Calculez son coefficient directeur a (pente), défini par $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Sachant que l'équation de la droite s'écrit $y = a.x + b$, calculez ensuite b en remplaçant x, y et a par leurs valeurs dans l'un des deux points.

[+] Aide / rappel
une fonction affine s'écrit $y = a.x + b$. Sur votre tracé, a correspond à la pente de la droite et b à son ordonnée à l'origine. Comment calculeriez-vous a "à la main" à partir de deux points quelconques (x_1, y_1) et (x_2, y_2) de la courbe ? Faites l'application numérique avec deux points de votre tracé pour vérifier la cohérence avec le résultat donné par le script python.

[++] Bonus / approfondissement
en reprenant l'expression de la fonction de coût $MSE(\theta)$ donnée en annexe, retrouvez par le calcul (en annulant la dérivée partielle) la formule de l'équation normale $\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T y$ dans le cas d'un modèle à un seul paramètre $y = \theta_1.x$.

Question 7 : **Refaire** la mesure précédente en mesurant aussi le courant qui traverse le moteur.

Question 8 : **Proposer** et **mettre en œuvre** un protocole permettant de mesurer la résistance interne du moteur. Donner la liste du matériel utilisé et ses caractéristiques (sensibilité, plage de mesure...).

[M] Maths pures
Dans l'équation $y = a.x$, isolez a en fonction de x et y (rappel : on divise les deux membres de l'égalité par la même quantité, ici x).

[+] Aide / rappel
la loi d'Ohm u = R.i relie une tension et un courant à travers une résistance. Dans quelles conditions (régime établi ou non) l'équation (1) du modèle se ramène-t-elle à une loi d'Ohm entre $u_m(t)$ et $i(t)$?

3 Vérification des modèles et analyse des résultats

Question 9 : À partir des résultats précédents, **déterminer** le couple résistant $C_r(t)$ pour le moteur libre. **Proposer** une solution permettant d'augmenter ce couple, **prédire** le comportement du système.

[M] Maths pures
Sachant que C = K.i, calculez C pour K = 0,05 et i = 2,3. N'oubliez pas de préciser l'unité du résultat à partir des unités de K et i.

[+] Aide / rappel
d'après la question 3, en régime établi, $C_r(t) = K_e.i(t)$. Il vous suffit donc de reprendre la mesure de i(t) à vide obtenue précédemment et la valeur de K_e déterminée à la question 6 pour faire l'application numérique.

3.1 Vérifier expérimentalement un modèle théorique

Question 10 : **Mettre en œuvre** ce nouveau protocole et **conclure** quant à la validité de la prédiction de la question 9.

3.2 Déterminer la valeur de L_m

Question 11 : **Proposer** sans les mettre en œuvre des protocoles permettant de déterminer la valeur de L_m.

4 Synthèse du TP

Question 12 : **Conclure** quant au modèle obtenu pour ce moteur à courant continu, **réaliser** une synthèse de ce TP présentant votre démarche pour répondre à la problématique.

5 Annexes

5.1 Régression linéaire

A partir d'un ensemble de couples de valeurs (x_i, y_i), le but de la régression linéaire et la prédiction d'un modèle linéaire :

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 \cdot x_1 + \theta_2 \cdot x_2 + ... + \theta_n \cdot x_n$$
$$\hat{y} = X\Theta$$

Ainsi, il faut trouver l'ensemble des θ_i qui minimisent l'écart (RMSE Root Mean Square Error ou critère des moindres carrés) entre $y = [y_0, y_1, ..., y_n]$ et $\hat{y}$. Pour la suite, on utilisera la MSE car le min de la RMSE est aussi celui de la MSE.

Il existe alors 2 solutions l'équation normale et la descente de gradient.

Équation normale

Il existe une solution analytique pour trouver la valeur de Θ qui minimise l'écart.

$$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^Y y$$

Fonction python

```
def regression_lineaire_eq_normale(x,y):
    X_b = np.array([[xi] for xi in x])
    theta_best = np.linalg.inv(X_b.T.dot(X_b)).dot(X_b.T).dot(y)
    return theta_best
```

Descente de gradient

La descente de gradient est un algorithme d'optimisation très général, capable de trouver des solutions optimales à un grand nombre de problèmes.

L'idée générale de la descente de gradient est de corriger petit à petit les paramètres dans le but de minimiser une fonction de coût.

L'algorithme suit la pente de la descente de la fonction MSE vers le bas pour la minimiser.

Dans le cas où il y aurait plusieurs variables il faudrait les normaliser afin que l'impact de leur variation soit identique, ce n'est pas le cas pour notre étude.

La descente de gradient consiste à calculer la dérivée partielle (cf cours de math)

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} MSE(\theta) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m} (\Theta^T x^{(i)} - y^{(i)}) x_j^{(i)}$$

On prendra en entrée :

— η : le taux d'apprentissage qui correspond à la taille des pas que l'on effectue dans la descente (plus η est grand, plus vite on converge, mais cela peut générer de l'instabilité),

— le nombre d'itérations

Fonction python

```
def regression_lineaire_descente_gradient(x,y):
    X_b = np.c_[np.ones((len(x), 1)), x]
    eta = 0.1 # taux d'apprentissage (vitesse à laquelle on suit la pente)
    n_iterations = 1000 # tester plusieurs valeurs
   m = 2 # nombre de paramètres
    theta = np.random.randn(2,1)    # initialisation aléatoire de la solution
    for iteration in range(n_iterations):
        gradients = 2/m * X_b.T.dot(X_b.dot(theta) - y)
```

```
        theta = theta - eta * gradients
    return theta
```

6 Correction

Question 1 : D'après les équations (1) à (4), **écrire** une équation liant $u_m(t)$, $\omega_m(t)$ et $C_m(t)$.

$$u_m(t) = \frac{L_m}{K_m}.\frac{dC_m(t)}{dt} + \frac{R_m}{K_m}.C_m(t) + K_e.\omega_m(t)$$

$$u_m(t) = \frac{L_m.J}{K_m}.\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} + \frac{R_m.J}{K_m}.\frac{d\omega_m(t)}{dt} + K_e.\omega_m(t)$$

[M] Maths pures : en remplaçant y par $3.x+2$ dans $z = 5.y-1$, on obtient $z = 5.(3.x+2)-1 = 15.x + 10 - 1 = 15.x + 9$.

Question 2 : Quelles sont les **hypothèses** à prendre afin de mettre cette équation sous la forme $u_m(t) = K.\omega_m(t)$.

Il faut se placer à vitesse constante (régime établi) et négliger les frottements, ainsi, $C_r(t) = 0$, $\frac{d^2\omega_m(t)}{dt^2} = 0$ et $\frac{d\omega_m(t)}{dt} = 0$.

Ainsi, $u_m(t) = K_e.\omega_m(t)$

[M] Maths pures : $\frac{df(t)}{dt} = 0$. Plus généralement, la dérivée par rapport au temps d'une grandeur constante (qui ne varie pas) est toujours nulle.

[++] Bonus : en transformée de Laplace, $U_m(p) = \left(\frac{L_m.J}{K_m}p^2 + \frac{R_m.J}{K_m}p + K_e\right)\Omega_m(p)$, soit $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{L_m.J.p^2 + R_m.J.p + K_e.K_m}$. C'est un système du second ordre. Lorsque $p \to 0$, la fonction de transfert tend vers $\frac{1}{K_e}$, ce qui redonne bien $u_m(t) = K_e.\omega_m(t)$ en régime permanent, conforme au résultat de la question 2.

Question 3 : En supposant que l'on arrive à mesurer le courant qui traverse le moteur, que devient-il alors possible de **mesurer** ?

Il est alors possible de déterminer le couple résistant $C_r(t)$ en régime établi.

Avec $C_m(t) = K_m.i(t)$ et $J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) = 0$ en régime établi, on obtient $C_r(t) = K_m.i(t) = K_e.i(t)$.

[M] Maths pures : $a = \frac{13-4}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$. En remplaçant dans le premier point : $4 = 3 \times 2 + b$, soit $b = 4 - 6 = -2$. La droite a donc pour équation $y = 3.x - 2$.

Question 6 :

[++] Bonus : pour un modèle à un seul paramètre $\hat{y} = \theta_1.x$, $MSE(\theta_1) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\theta_1.x^{(i)} - y^{(i)})^2$. En annulant sa dérivée : $\frac{d}{d\theta_1}MSE(\theta_1) = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m}x^{(i)}(\theta_1.x^{(i)} - y^{(i)}) = 0$, soit $\theta_1\sum(x^{(i)})^2 = \sum x^{(i)}y^{(i)}$, donc $\theta_1 = \frac{\sum x^{(i)}y^{(i)}}{\sum(x^{(i)})^2}$. On retrouve bien la forme matricielle $\hat{\Theta} = (X^TX)^{-1}X^Ty$ dans ce cas particulier à une dimension, où $X^TX = \sum(x^{(i)})^2$ (un scalaire) et $X^Ty = \sum x^{(i)}y^{(i)}$.

Question 8 :

[M] Maths pures : en divisant les deux membres de $y = a.x$ par x, on obtient $a = \frac{y}{x}$. Appliqué à la loi d'Ohm $u = R.i$, cela donne $R = \frac{u}{i}$, valable en régime établi (continu) puisque l'équation (1) se réduit alors à $u_m(t) = R_m.i(t) + K_e.\omega_m(t)$ à vitesse nulle (moteur bloqué), soit $u_m(t) = R_m.i(t)$.

Question 9 :

[M] Maths pures : $C = 0{,}05 \times 2{,}3 = 0{,}115$ N.m.